

KOENIGLICHES DOMGYMNASIUM

UND

KOENIGL. REALGYMNASIUM

ZU

COLBERG.

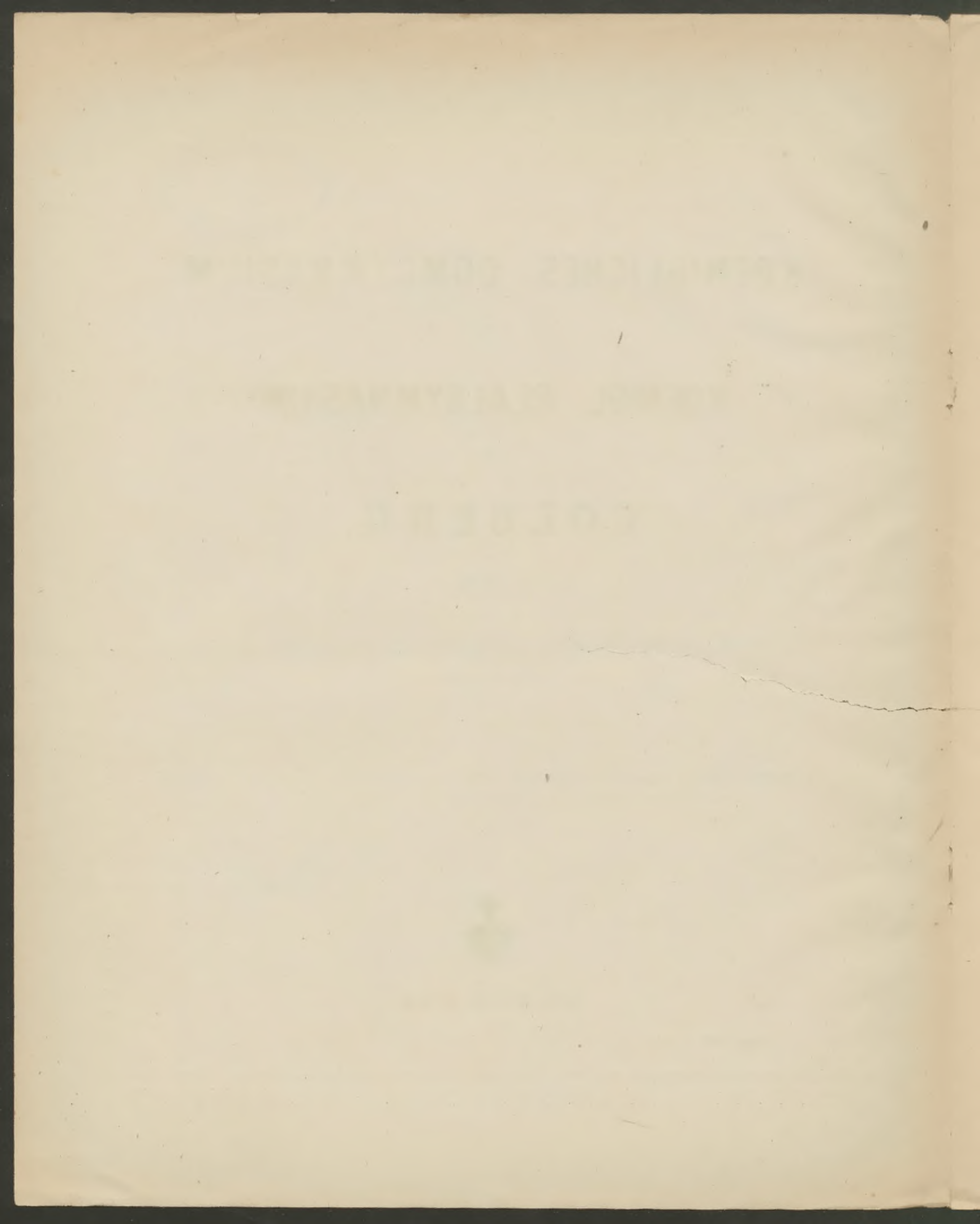
1888.

INHALT: Die Binomialcoefficienten und einige wichtigere Reihen (Pensum der Prima). vom Gymnasiallehrer Dr. Wellmann.



COLBERG 1888.
Druck von Rudolf Knobloch.

Progr. 1888 Nr. 121.



Die Binomialcoefficienten und einige wichtigere Reihen (Pensum der Prima).

A. Von den Binomialcoefficienten.

Erklärung: I. Das Product 1. 2. 3. . . . . n, dessen Faktoren die n ersten Zahlen der Zahlenreihe sind, wird bezeichnet mit $n!$ und heisst die Fakultät von n. So ist $6! = 1.2.3.4.5.6.$

II. Unter dem nten Binomialcoefficienten aus der Zahl a oder der Tieffunktion a_n gelesen a tief n versteht man einen Quotienten, der im Zähler und Nenner gleich viel nämlich n Faktoren hat, und zwar ist der erste Faktor im Zähler gleich der Zahl a und jeder folgende um 1 kleiner als der vorhergehende, der Nenner ist die Fakultät von n. Die Zahl a ist beliebig, der Zeiger oder Index n soll hier stets als ganze positive Zahl genommen werden.

$$\text{So ist } 8_3 = \frac{8.\,7.\,6.}{3!},\quad a_4 = \frac{a.\,a-1.\,a-2.\,a-3}{4!},\quad a_n = \frac{a.\,a-1.\,a-2.\,a-3.\ldots.\,a-(n-1)}{n!}$$

§ 1.

Ein Binomialcoefficient, in welchem die Zahl gleich dem Zeiger ist, ist gleich Eins.

$$a_a = 1.$$

Beweis:
$$a_a = \frac{a.\,a-1.\,a-2.\,a-3.\,\ldots\,a-(a-3).\,a-(a-2).\,a-(a-1)}{a!}$$
$$= \frac{a.\,a-1.\,a-2.\,a-3.\,\ldots\,3.\,2.\,1.}{a!}$$
$$= 1.$$

Anmerkung: Da nach der Annahme der Zeiger stets eine positive ganze Zahl sein soll, so kann ein Binomialcoefficient a_a nur vorkommen, wenn auch die Zahl a eine ganze positive Zahl ist.

§ 2.

Ein Binomialcoefficient aus einer ganzen positiven Zahl a ist gleich Null, wenn der Zeiger n grösser als die Zahl a ist.

$$a_n = 0, \text{ wenn } n > a \text{ ist.}$$

Beweis: Da $n > a$ sein soll, so ist der kleinste Wert von $n = a + 1$. Für a_{a+1} hat der Dividend $(a+1)$ Faktoren, deren erster a, der zweite $a-1$, der dritte $a-2$, also der $(a+1)$ste $a-(a+1-1)$ ist. Dies ist aber Null, mithin ist der Dividend gleich Null, also auch der ganze Bruch, da der Nenner von Null verschieden ist. Wenn $a > n$ ist, enthalten folglich alle Zähler den Faktor Null, und es ist

$$a_n = 0 \text{ für } n > a.$$

Anmerkung: Es ist a_n niemals gleich Null, wenn a eine gebrochene oder negative Zahl ist.

§ 3.

Zwei Binomialcoefficienten aus derselben Zahl sind einander gleich, wenn die Summe ihrer Zeiger gleich der Zahl ist.

$$a_n = a_{a-n}, \text{ a und n ganze positive Zahlen.}$$

Beweis: Es sei $n > a-n$, dann ist

$$a_n = \frac{a.\ a-1.\ a-2 \ldots\ldots a-n+2.\ a-n+1}{n!}$$

Da nach Annahme $n > a-n$ ist, so muss unter den Faktoren des Zählers ein Faktor $a-(a-n-1)=n+1$ sein, und die darauf folgenden $n, n-1, n-2, n-3 \ldots a-n+1$. Im Nenner muss ein Faktor $a-n$, die darauf folgenden $a-n+1$, $a-n+2$ bis n sein. Daher ist

$$a_n = \frac{a.\ a-1.\ a-2.\ a-3 \ldots a-(a-n-1).}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots a-n} \Big| \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ldots\ldots a-n+1}{a-n+1.\ a-n+2.\ldots\ldots n-2.\ n-1.\ n}$$

Der Quotient links vom Teilungsstrich hat aber im Zähler und Nenner $a-n$ Faktoren, von denen im Zähler der erste a und jeder folgende um 1 kleiner als der vorhergehende ist, während der Nenner $(a-n)!$ ist. Der Quotient ist mithin a_{a-n}, derjenige rechts vom Teilungsstrich ist 1, also ist

$$a_n = a_{a-n}.$$

Beispiel: $12_7 = 12_5$ $\quad \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9.\ 8.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} \Big| \frac{7.\ 6.}{6.\ 7.}$

Zusatz: $a_0 = 1$.

§ 4.

Die Summe zweier Binomialcoefficienten aus derselben Zahl, deren Zeiger um 1 verschieden sind, ist gleich einem Binomialcoefficienten, dessen Zahl um 1 grösser ist, als die Zahl der beiden Summanden, und dessen Zeiger der grössere von den Zeigern jener ist.

$$a_n + a_{n-1} = (a+1)n.$$

Beweis: a_n hat im Zähler und Nenner einen Faktor mehr als a_{n-1} und zwar im Zähler den Faktor $a-(n-1)$, im Nenner den Faktor n, mithin ist:

$$a_n + a_{n-1} = \left(\frac{a.\ a-1.\ a-2 \ldots\ldots a-(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n-1}\right)\left(1 + \frac{a-(n-1)}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{a.\ a-1-a-2 \ldots a-(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n-1}\right)\left(\frac{n+a-n+1)}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{a.\ a-1.\ a-2 \ldots a-(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots n-1}\right)\left(\frac{a+1}{n}\right)$$ Die Reihenfolge der Faktoren ist willkürlich, also

$$a_n + a_{n-1} = \frac{a+1.\ a.\ a-1.\ a-2 \ldots\ldots a-(n-2)}{n!}$$

Zähler und Nenner der rechten Seite hat aber n Faktoren, von denen der erste im Zähler $a+1$ und jeder folgende um 1 kleiner ist als der vorhergehende, der Nenner ist n! und dies ist nach der Erklärung $(a+1)_n$, also ist

$$a_n + a_{n-1} = (a+1)_n.$$

Setzt man für n, n+1, so erhält man

$$(a+1)_{n+1} = a_{n+1} + a_n.$$

Beispiele: $7_4 + 7_3 = 8_4$. $(^3/_8)_9 + (^3/_8)_8 = (^{11}/_8)_9$, $(-7)_4 + (-7)_3 = (-6)_4$,

Folgerung: Setzt man in der Formel

$$(a+1)_{n+1} = a_{n+1} + a_n.$$

$a_{n+1} = (a-1)_n + (a-1)_{n+1}$, so erhält man

$$(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-1)_{n+1}.$$ Hierin ist wiederum

$(a-1)_{n+1} = (a-2)_n + (a-2)_{n+1}$, also $(a+1)_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-2)_n + (a-2)_{n+1}$.

Ist a eine ganze positive Zahl, so gelangt man durch fortgesetzte Anwendung der Formel $(a+1)_{n+1} = a_n + a_{n+1}$ schliesslich zu einem Binomialcoefficienten, dessen Zahl $a-(a-n) = n$ ist. Dann ist aber das Glied $n_{n+1} = o$ und man erhält

$$a_{n+1} = a_n + (a-1)_n + (a-2)_n + (a-3)_n + \dots \, n_n$$

So ist: $6_2 = 5_1 + 4_1 + 3_1 + 2_1 + 1_1$; $7_3 = 6_2 + 5_2 + 4_2 + 3_2 + 2_2$; $8_4 = 7_3 + 6_3 + 5_3 + 4_3 + 3_3$.

§ 5.

Ist die Zahl a eines Binomialcoefficienten negativ, so ist

$$(-a)_n = (-1)^n (a+n-1)_n.$$

Beweis: $(-a)_2 = \frac{-a. -(a+1)}{1.2} = \frac{a+1.a}{2!} = (a+1)_2$

$$(-a)_3 = \frac{-a. -(a+1). -(a+2)}{3!} = -\frac{a+2.a+1.a}{3!} = -(a+2)_3$$

$$(-a)_4 = \frac{-a. -(a+1). -(a+2). -(a+3)}{4!} = \frac{a+3.a+2.a+1.a}{4!} = (a+3)_4.$$

$$(-a)2n = \frac{-a. -(a+1). -(a+2) \dots -(a+2n-1)}{(2n)!} =$$

$$\frac{(a+2n-1).(a+2n-2) \dots a+2.a+1.a}{(2n)!} = (a+2n-1)_{2n}.$$

$$(-a)\,2_{n+1} = \frac{-a. -(a+1) \dots -(a+2n)}{(2n+1)!} = -\frac{a+2n-a+2n-1 \dots a+1.a}{(2n+1)!} =$$

$$-(a+2n)2n+1.$$

§ 6.

Ist a eine ganze Zahl, so sind alle Binomialcoefficienten von a ganze Zahlen.

Beweis: I. Fall: a sei positiv. Zuerst ist a_2 eine ganze Zahl, da

$$a_2 = \frac{a.a-1}{1.2}$$

und von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine durch 2 teilbar ist. Ferner ist

$$a_3 = (a-1)_2 + (a-2)_2 + \dots \, 2_2.$$

Hierin sind die einzelnen Summanden ganze Zahlen, mithin auch ihre Summe a_3. Ebenso folgt aus $a_4 = (a-1)_3 + (a-2)_3 - \dots \, 3_3$, dass a_4 eine ganze Zahl ist, da die Summanden ganze Zahlen sind. Ist aber a_4 eine ganze Zahl, so ist es auch a_5 etc. Daher a_n eine ganze Zahl, wenn a eine ganze positive Zahl ist.

II. Fall: a sei negativ. Da $(-a)_n = (-1)^n (a+n-1)_n$ ist und wie Fall I gezeigt $(a+n-1)_n$ eine ganze Zahl ist, so ist auch $(-a)_n$ eine ganze positive oder negative Zahl je nachdem n gerade oder ungerade ist.

B. Reihen.

Erklärung: Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze gebildet erscheinen, heisst eine Reihe oder Progression. Jede dieser Zahlen wird ein Glied der Reihe genannt. Enthält die Reihe nur eine begrenzte Anzahl von Gliedern, so heisst sie eine endliche, liegt es aber in der Natur der Reihe, dass die Gliederzahl nicht beschränkt sein kann, so wird die Reihe eine unendliche genannt. So führt die Aufgabe: es soll ein Brunnen von n Meter Tiefe gegraben werden. Der erste

Meter kostet a Mark, jeder folgende d Mark mehr als der vorhergehende. Wie teuer wurde der Brunnen? zu der endlichen Reihe

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots a + (n - 1) d,$$

welche nach dem Gesetze gebildet erscheint, dass jedes folgende Glied um d grösser sein soll als das vorhergehende.

Zu einer unendlichen Reihe gelangt man dagegen schon, wenn man in $\frac{1}{1-x}$ die Division ausführt. Man erhält dann die unendliche Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \text{ in infinitum,}$$

welche nach dem Gesetz gebildet erscheint, dass jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit dem Faktor x hervorgeht.

Eine Reihe, in welcher die aufeinander folgenden Glieder so beschaffen sind, dass sie immer grösser werden, heisst eine steigende, im Gegenteile eine fallende.

Gewöhnlich bezeichnet man die sämtlichen Glieder einer Reihe mit einerlei Buchstaben, denen man Stellenzeiger hinzufügt, um sogleich erkennen zu können, in der wie vielten Stelle von links nach rechts gezählt ein Glied der Reihe steht z. B.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots a_{n-1} + a_n,$$

wobei jedoch diese Stellenzeiger nicht zu verwechseln sind mit den Zeigern der Binomialcoefficienten, die fortan stets mit römischen Zahlen bezeichnet werden sollen.

a_n ist das allgemeine Glied der Reihe, aus welchem man jedes besondere Glied erhält, wenn man statt des allgemeinen Zeigers den besondern Zeiger setzt.

Dies allgemeine Glied muss stets so dargestellt werden, dass man aus demselben das Bildungsgesetz der Reihe erkennen kann. Ist z. B. das allgemeine Glied $a + (n - 1) d$, so erhält man jedes Glied der Reihe, indem man für die veränderliche Grösse n nach einander die Werte 1, 2, 3 etc. einsetzt, wodurch man die Reihe a, $a + d$, $a + 2d$ etc. erhält. Zugleich kann man aus dem allgemeinen Glied das Bildungsgesetz der Reihe erkennen, nämlich jedes folgende Glied ist um eine constante Zahl grösser als das vorhergehende.

Bei jeder Reihe kann ferner verlangt werden, dass man die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern vom ersten angefangen auffinde. Der Ausdruck für die zu bestimmende Summe heisst das summatorische Glied; es muss wie das allgemeine Glied von dem allgemeinen Zeiger n abhängig sein. Setzt man dann statt n die Werte 2, 3, 4 etc., so erhält man aus dem summatorischen Glied die Summe von 2, 3, 4 etc. Gliedern der Reihe. Man bezeichnet das summatorische Glied mit Sn. Ist z. B.

$$S_n = a n + \frac{n . (n - 1) d}{1 . 2}, \text{ so ist für } a = 2, \ d = 3$$

$$S_8 = 2 . 8 + \frac{8. 7. 3.}{1 . 2} = 16 + 84 = 100.$$

Für die Bestimmung der Summe der Glieder einer Reihe ist es von Wichtigkeit zu wissen, ob die Reihe nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, oder ob die Anzahl der Glieder ins Unendliche wächst. Im letztern Falle heisst die Reihe convergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder einen endlichen Wert hat, divergent, wenn die Summe aller ihrer Glieder unendlich oder unbestimmt ist. So hat die oben angeführte unendliche Reihe: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ für $x = 1/_2$ den Wert 2, dagegen ist sie für jeden Wert von x grösser als 1 divergent, da die Glieder ins Unendliche wachsen, mithin auch ihre Summe unendlich wird.

§ 1.

Eine Reihe, deren Glieder ihrem absolutem Werte nach betrachtet fortwährend wachsen, ist stets divergent.

Beweis: I. Fall: Die Reihe enthält nur positive Glieder. Beim Fortschreiten der Reihe werden die einzelnen Glieder immer grösser bis zum unendlich grossen, mithin ist auch ihre Summe unendlich gross.

II. Fall: Alle Glieder sind negativ. Da beim Fortschreiten der Reihe die einzelnen Glieder absolut genommen immer grösser werden bis $- \infty$, so ist auch ihre Summe $- \infty$ und die Reihe divergent.

III. Fall: Die Reihe enthält abwechselnd positive und negative Glieder. Man kann die Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ entweder wie folgt ordnen: $a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \ldots$ Da nach Annahme $a_2 \angle a_3$, $a_4 \angle a_5$ etc., so ist der Inhalt jeder Klammer negativ, mithin wächst die Reihe fortwährend und ist daher divergent, oder wenn die Reihe mit einem negativen Gliede schliesst $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots$ Hier ist der Inhalt jeder Klammer negativ, mithin, da die Anzahl der Klammern unbeschränkt ist, die Reihe divergent. Die Reihe ist also unbestimmt, folglich divergent.

Zusatz. Die erste Bedingung, damit eine unendliche Reihe convergent sei, ist mithin, dass ihre Glieder von einem endlichen an gerechnet beständig bis zum Verschwinden abnehmen. Aber dies Merkmal allein genügt nicht, wie die Betrachtung der Reihe

$$1/_1 + 1/_2 + 1/_3 | + 1/_4 + 1/_5 + 1/_6 | + 1/_7 + 1/_8 + 1/_9 + 1/_{10} + 1/_{11} + 1/_{12} | + \ldots\ldots\ldots\ldots 1/_{24} | + \ldots$$

zeigt, welche aus dem allgemeinen Gliede $a_n = a + \frac{b}{n}$ hervorgegangen ist, wenn $a = o$ und $b = 1$ gesetzt wird und n den allgemeinen Zeiger bezeichnet. In dieser Reihe nehmen zwar die Glieder bis zum Verschwinden ab, ohne dass die Reihe convergent ist, da abgesehen von der ersten Gruppe jede Gruppe grösser als $1/_2$ ist, wenn man in die einzelnen Gruppen je 3, 6, 12, 24 etc. Glieder setzt. Da die Zahl der Gruppen unendlich ist, so ist auch die Summe der ganzen Reihe unendlich, dieselbe also divergent. Ein zweites hinreichendes Kennzeichen für die Convergenz und Divergenz der Reihen ergiebt sich später.

§ 2.

Man kann zwei Arten von Reihen unterscheiden, arithmetische und geometrische, je nachdem dem Bildungsgesetz die Addition bezüglich Subtraction oder die Multiplication bezüglich Division zu Grunde liegt.

I. Arithmetische Reihen.

Erklärung: Man unterscheidet die arithmetischen Reihen in Reihen erster, zweiter und höherer Ordnung, je nachdem die Veränderliche in erster, zweiter oder höherer Potenz in dem allgemeinen Glied vorkommt. So entsteht, wenn $a_n = a + d(n - 1)$ das allgemeine Glied ist, eine arithmetische Reihe erster Ordnung, indem man der Veränderlichen n alle Werte von 1 bis zu einer bestimmten Grenze beilegt. Die Reihe würde dann lauten: $\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \underset{4}{a+3d}, \ldots \underset{n}{a+(n-1)d}$, wo die untergesetzten Zahlen die Stelle der Glieder in der Reihe bezeichnen.

Ist dagegen das allgemeine Glied $a_n = a + b(n - 1) + c(n - 1)^2$, so bezeichnet dies eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, und die Reihe würde lauten, indem man für n die Worte 1, 2, 3 etc. bis zu einer bestimmten Grenze einsetzt.

$$\underset{1}{a},\quad \underset{2}{a+b+c},\quad \underset{3}{a+2b+4c},\quad \underset{4}{a+3b+9c},\quad \ldots\ldots \quad \underset{n.}{a+(n-1)b+(n-1)^2c}$$

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

§ 1.

Aus dem allgemeinen Gliede für die arithmetischen Reihen I. Ordnung $a_n = a \mp (n - 1)d$ folgt, dass jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition bezüglich Subtraction der Grösse d, die den Namen der Differenz der Reihe führt, hervorgeht. Aus dem allgemeinen Glied ist auch ersichtlich, dass eine unendliche arithmetische Reihe I. Ordnung stets divergent ist, da bei wachsender Stellenzahl die Glieder entweder positiv oder negativ ins Unendliche wachsen, je nachdem d positiv oder negativ ist. Das summatorische Glied kann sich daher in diesem Falle immer nur auf eine endliche Anzahl von Gliedern erstrecken.

§ 2.

$$Sn = \tfrac{n}{2}(a + a_n) = na + n_{II}d.$$

Beweis: Man denke sich die Reihe einmal geschrieben: $S_n = a + a + d + a + 2d + \ldots a_n$, und zweitens indem man die Reihenfolge der Glieder umkehrt: $S_n = a_n + a_n - d + a_n - 2d + \ldots a$

durch Addition erhält man $2S_n = n(a + a_n)$ oder $Sn = \frac{n}{2}(a + a_n)$

Setzt man für a_n seinen Wert $a + (n-1)d$ ein, so ist $S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = na + \frac{n.n-1}{1.2}d = na + n_{II}d$.

§ 3.

Die Formeln für das allgemeine und das summatorische Glied kann man als algebraische Gleichungen betrachten zwischen den Grössen a, d, n, a_n und Sn. Da man aber aus zwei Gleichungen nur 2 Unbekannte berechnen kann, so müssen stets 3 Grössen gegeben sein, damit die beiden anderen berechnet werden können. In der folgenden Tabelle sind aus 3 gegebenen Grössen die beiden anderen entwickelt und dadurch alle Aufgaben gelöst, welche bei diesen Aufgaben sich stellen lassen.

	Gegeben	Gesucht	Formel
1.	a, d, n	I a_n II Sn	$a_n = a + (n-1)\,d$ $Sn = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)\,d) = na + n_{II}\,d$
2.	a, d, Sn	I a_n II n	$a_n = \frac{-d \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8\,d\,Sn}}{2.}$ $n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8\,d\,Sn}}{2d.}$
3.	a, d, a_n	I Sn II n	$Sn = \frac{(a_n + a)(a_n - a + d)}{2d}$ $n = \frac{d - a + a_n}{d}$
4.	a, n, a_n	I Sn II d	$Sn = \frac{n}{2}(a + a_n)$ $d = \frac{a_n - a}{n-1}$
5.	a, n, Sn	I a_n II d	$a_n = \frac{2Sn - a\,.\,n}{n}$ $d = \frac{2\,(Sn - a\,.\,n)}{n\,.\,(n-1)}$
6.	a, a_n, Sn	I d II n	$d = \frac{(a_n + a)(a_n - a)}{2\,Sn - (a_n + a)}$ $n = \frac{2\,Sn}{a + a_n}$
7.	d, n, Sn	I a II a_n	$a = \frac{2\,Sn - n\,(n-1)\,d}{2n}$ $a_n = \frac{n\,(n-1)\,d + 2\,Sn}{2\,n}$
8.	d, n, a_n	I a II Sn	$a = a_n - (n-1)\,d$ $Sn = (2a_n - (n-1)\,d)\,\frac{n}{2}$
9.	n, a_n, Sn	I a II d	$a = \frac{2Sn - n\,.\,a_n}{n}$ $d = \frac{2\,(na_n - Sn)}{n\,.\,(n-1)}$
10.	d, a_n, Sn	I a II n	$a = \frac{d \pm \sqrt{(d + 2\,a_n)^2 - 8\,d\,Sn}}{2}$ $n = \frac{d + 2a_n \pm \sqrt{(d + 2a_n)^2 - 8d\,Sn}}{2d}$

§ 4.

Aufgabe: Zwischen a und b sollen n Glieder eingeschaltet (interpoliert) werden, so dass die erhaltenen Zahlen eine arithmetische Reihe I. Ordnung bilden.

Auflösung: Gegeben ist a, n und $a_n = b$, gesucht wird d. Man findet Nr. 4, II $d = \frac{b-a}{n+1}$, da die neue Reihe n + 2 Glieder haben soll, und daher für n der Wert n + 2 eingesetzt werden muss. Die Glieder der gesuchten Reihe werden mithin:

$$a_1 = a_1;\; a_2 = a_1 + \frac{b - a_1}{n+1} = \frac{a_1 . n + b}{n+1},\; a_3 = \frac{a_1 . n + b + b - a_1}{n+1} = \frac{a_1 . (n - 1) + 2b}{n+1};$$

$$a_4 = \frac{a_1 (n - 2) + 3b}{n+1} \ldots.$$

Zusatz: Soll zwischen a und b nur ein Glied eingeschaltet werden, so dass die 3 Glieder eine arithmetische Reihe bilden, so ist $d = \frac{b-a}{2}$ und die Reihe a; $\frac{a+b}{2}$; b. Man nennt das eingeschaltete Glied das arithmetische Mittel zwischen a und b.

II. Arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

§ 1.

Hat das allgemeine Glied die Form

$a_n = a + b(n - 1) + c(n - 1)^2$, wo a und b auch gleich Null sein können, so entsteht, wenn man für die Veränderliche n die Werte 1, 2, 3 . . . bis zu einer bestimmten Grenze einsetzt, eine arithmetische Reihe II. Ordnung folgender Gestalt:

$$\underset{1}{a};\; \underset{2}{a+b+c};\; \underset{3}{a+2b+4c};\; \underset{4}{a+3b+9c};\; \ldots\; \underset{n-1}{a+(n-2)b+(n-2)^2c};\; \underset{n.}{a+(n-1)b+(n-1)^2c}$$

§ 2.

Erklärung: Subtrahiert man von jedem Gliede einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung immer das vorhergehende, so bilden die entstandenen Reste eine neue Reihe, die erste Differenzreihe. Verfährt man mit dieser ebenso, so erhält man die zweite Differenzreihe und so fort.

§ 3.

Jede arithmetische Reihe pter Ordnung hat p und nur p Differenzreihen. Die Glieder der letzten Differenzreihe sind einander gleich und zwar gleich der Fakultät aus dem höchsten Exponenten des allgemeinen Gliedes der gegebenen Reihe multipliciert mit dem constanten Faktor dieser Potenz.

Beweis: Es sei $a_n = a + b(n-1) + c(n-1)^2 + \ldots . d(n-1)^p$ das allgemeine Glied einer Reihe pter Ordnung. Um das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe zu erhalten, muss man von a_n das Glied a_{n-1} subtrahieren.

$$a_n - a_{n-1} = a_1 + b(n-1) + c(n-1)^2 + \ldots\ldots d(n-1)^p - a_1 - b(n-2) - c(n-2)^2 \ldots d(n-2)^p$$
$$= a_1 - a_1 + b(n - 1) - b(n - 2) + c(n-1)^2 - c(n-2)^2 + \ldots . d(n - 1)^p - d(n-2)^p.$$

Entwickelt man hierin die Klammern nach dem binomischen Lehrsatz und subtrahiert, so erhält man:

$$a_n - a_{n-1} = a_1 - a_1 + bn - b - bn + 2b - c(n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4) + \ldots\; d(n^p - pn^{p-1} + p_{11} n^{p-2} - p_{111} n^{p-3}$$
$$+ \ldots . - n^p + 2pn^{p-1} - 4\, p_{11} n^{p-2} + 8\, p_{111} n^{p-3} + \ldots .)$$
$$= b - 3c + \ldots + n(2c + \ldots) + \ldots \qquad dpn^{p-1}.$$

Bezeichnet man hierin die algebraische Summe der constanten Grössen mit b_1 und die Faktoren, mit denen die einzelnen Potenzen der Veränderlichen n multipliciert sind, mit c_1 etc., so ist $a_n - a_{n-1} = b_1 + c_1 n + \ldots . dpn^{p-1}$ d. h. das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe b_{1n} ist von einer Ordnung geringer als die ursprüngliche Reihe und der Coefficient des höchsten Gliedes ist der constante Faktor des höchsten Gliedes der gegebenen Reihe multipliciert mit dem Potenzexponenten dieses Gliedes.

Subtrahiert man in dieser Reihe von b_{1n} das Glied $b_{1\,n-1}$, so erhält man das allgemeine Glied der zweiten Differenzreihe, nämlich

$$b_{1n} - b_{1\,n-1} = b_1 - b_1 + c_1 n - c_1 (n-1) + \ldots . dpn^{p-1} - dp (n-1)^{p-1}$$
$$= c_1 + \ldots . . \qquad + dp(n^{p-1} - n^{p-1} + (p-1)n^{p-2} - + \ldots) \text{ also}$$
$$c_{2n} = c_2 + \ldots . dp . p - 1 . n^{p-2}.$$

Mithin ist auch die zweite Differenzreihe um einen Grad niedriger als die erste Differenzreihe und der Coefficient des höchsten Gliedes $d . p . p - 1$. Verfährt man ebenso mit dieser und den folgenden Differenzreihen, so erhält man als $(p-1)$te Differenzreihe eine arithmetische Reihe I. Ordnung, worin der Faktor der Veränderlichen $d . p . p - 1 . p - 2 \ldots . 4. 3. 2.$ ist, nämlich

$e_n = e_1 + d . p . p - 1 . p - 2 \ldots . . 4. 3. 2n.$ Bildet man hiervon die Differenzreihe, so ist $d_n = e_1 - e_1 + d p . p - 1 \ldots 4. 3. 2 (n - n + 1)$
$= d . p . p - 1 \ldots . \; 4. 3. 2. 1 = d . p!$ Da hierin die Veränderliche nicht mehr enthalten ist, so lässt sich auch keine Differenzreihe mehr bilden, mithin haben die arithmetischen Reihen $p$ter Ordnung p und nur p Differenzreihen und die Glieder der letzten sind $d. p!$

Zusatz: Die arithmetischen Reihen zweiter Ordnung haben also die Eigenschaft, dass ihre zweiten Differenzreihen gleiche aber von Null verschiedene Glieder haben.

Ist $a_n = a + b(n-1) + c(n-1)^2$ das allgemeine Glied, so ist die Reihe

$$\underset{1}{a}, \; \underset{2}{a+b+c}, \; \underset{3}{a+2b+4c}, \; \underset{4}{a+3b+9c}, \; \ldots \; \underset{n-1}{a+(n-2)b+(n-2)^2c}, \; \underset{n}{a+(n-1)b+(n-1^2c}$$

die erste Differenzreihe: $b + c, \; b + 3c, \; b + 5c, \ldots .$ und die zweite
$2c, \; 2c, \; 2c \ldots$

Setzt man z. B. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, so ist

die Hauptreihe 1, 6, 17, 34, 57, 86, 121, . . .
I. Differenzreihe 5, 11, 17, 23, 29, 36
II. Differenzreihe 6, 6, 6, 6, 6

Die erste Differenzreihe ist mithin in diesem Falle eine arithmetische Reihe I. Ordnung von der Form $5+(n-1)6$, und man erkennt eine vorgelegte Folge von Zahlen als eine arithmetische Reihe II. Ordnung daran, dass die Glieder ihrer zweiten Differenzreihe sämtlich einander gleich aber nicht Null sind.

§ 4.

Das $n$te Glied einer arithmetischen Reihe $n$ter Ordnung ist gleich der Summe des ersten Gliedes der Reihe selbst und der ersten $n-1$ Glieder ihrer ersten Differenzreihe: $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_{n-1}$, wenn man die Glieder der gegebenen Reihe mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$, die der ersten Differenzreihe mit $b_1, b_2 \ldots$, die der zweiten mit $c_1, c_2, c_3 \ldots$ etc. bezeichne.

Beweis: Nach der Erklärung ist:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n - a_{n-1} \\ b_{n-2} &= a_{n-1} - a_{n-2} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} - a_{n-3} \\ &\;\vdots \\ b_3 &= a_4 - a_3 \\ b_2 &= a_3 - a_2 \\ b_1 &= a_2 - a_1 \end{aligned}$$

Durch Addition ergiebt sich

$$b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + \ldots . . b_3 + b_2 + b_1 = a_n - a_1 \text{ oder}$$
$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_{n-3} + b_{n-2} + b_{n-1}.$$

§ 5.

Das allgemeine Glied einer Reihe zweiter Ordnung lässt sich ausdrücken durch das erste Glied der gegebenen Reihe und die ersten Glieder der beiden Differenzreihen:

$$a_n = a_1 + b_1 (n - 1) + c_1 (n - 1)_{II}.$$

Beweis: Es ist $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_{n-1}$. Hierin ist $b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}$ eine arithmetische Reihe erster Ordnung aus $(n-1)$ Gliedern, deren Differenz c_1 ist, mithin ist $b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1} = b_1 (n - 1) + (n - 1)_{II} c_1$ und $a_n = a_1 + b_1 (n-1) + c_1 (n-1)_{II}$.

§ 6.

$$S_n = a_1 . n + b_1 . n_{II} + c_1 n_{III}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 = a_1 \\ a_2 &= a_1 + 1 . b_1 \\ a_3 &= a_1 + 2b_1 + c_1 2_{II} \\ a_4 &= a_1 + 3b_1 + c_1 3_{II} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n &= a_1 + b_1(n-1) + c_1(n-1)_{II} \end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert

$$S_n = n . n_1 + b_1 [1+2+3+ \ldots (n-1)] + c_1 [2_{II} + 3_{II} + 4_{II} + \ldots (n-1)_{II}]$$

$$S_n = n . a_1 + b_1 n_{II} + c_1 n_{III}.$$

§ 7.

Aufgabe: Das allgemeine Glied einer Reihe zu finden, wenn man aus den gegebenen Gliedern die Reihe als eine arithmetische Reihe II. Ordnung erkennen kann.

Gegeben die Glieder: 1, 6, 17, 34, 57.

Gesucht das allgemeine Glied der Reihe.

Auflösung: Man erkennt die vorgelegte Reihe als eine arithmetische II. Ordnung daran, dass die Glieder der zweiten Differenzreihe gleich aber von Null verschieden sind, denn es ist:

1, 6, 17, 34, 57	die Hauptreihe
5, 11, 17, 23	die erste Differenzreihe
6, 6, 6	die zweite Differenzreihe

Um nun in $a_n = a + b (n-1) + c(n-1)^2$, a, b und c zu bestimmen, beachte man, dass für $n=1$ sich $a=1$ ergiebt, und dass $c . 2! = 6$ also $c=3$ ist. b wird erhalten aus $a_2 - a_1 = b + c = 5$ oder $b=2$. Mithin ist $a_n = 1 + 2 (n - 1) + 3 (n - 1)^2$. So ist das fünfte Glied gleich $1 + 2 . 4 + 3 . 4^2 = 57$.

Zusatz I. Ist $a=0$, $b=0$, $c=1$, so liefert $a_n = a + b(n-1) + c(n-1)^2$ die Reihe der Quadratzahlen, die also eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, nämlich

0, 2, 4, 9, 16, 25 . . .	Hauptreihe
1, 3, 5, 7, 9	erste Differenzreihe
2, 2, 2, 2	zweite Differenzreihe.

Die Summe der ersten n Quadratzahlen findet man aus

$$S_n = . a_1 + b_1 n_{II} + c_1 . n_{III}$$

So ist $S_7 = 0 + \frac{1 . 7 . 6}{1 . 2} + \frac{2 . 7 . 6 . 5}{1 . 2 . 3} = 91.$

Zusatz II. Die unendlichen arithmetischen Reihen II. Ordnung sind stets divergent, denn die Glieder derselben wachsen beim Fortschreiten der Reihe positiv oder negativ ins Unendliche, je nach dem Vorzeichen von a, b und c.

III. Arithmetische Reihen III. und höherer Ordnung.

§ 1.

Das allgemeine Glied einer Reihe III. Ordnung $a_n = a + b(n-1) + c(n-1)^2 + d(n-1)^3$ lässt sich durch das erste Glied der gegebenen Reihe und die ersten Glieder der einzelnen Differenzreihen ausdrücken.

$$a_n = a_1 + b_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III}.$$

Beweis: Es ist $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_{n-1}$. Hierin ist $b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1}$ eine arithmetische Reihe II. Ordnung von $(n-1)$ Gliedern, mithin ihre Summe $S_{n-1} = (n-1)b_1 + (n-1)_{II}c_1 + (n-1)_{III}d_1$ folglich $a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III}$.

§ 2.

$$S_n = n \cdot a_1 + n_{II} b_1 + n_{III} c_1 + n_{IV} d_1.$$

Beweis: Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + b_1 \cdot 1 \\
a_3 &= a_1 + b_1 \cdot 2 + c_1 \cdot 2_{II} \\
a_4 &= a_1 + b_1 \cdot 3 + c_1 \cdot 3_{II} + d_1 \cdot 3_{III} \\
a_5 &= a_1 + b_1 \cdot 4 + c_1 \cdot 4_{II} + d_1 \cdot 4_{III} \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + b_1 \cdot (n-1) + c_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III}.
\end{aligned}$$

Durch Addition erhält man

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n = n \cdot a_1 + b_1(1+2+\ldots(n-1)] + c_1(2_{II} + 3_{II} + \ldots(n-1)_{II}) + d_1(3_{III} + 4_{III} + \ldots(n-1)_{III})$$

also $S_n = n \cdot a_1 + n_{II} b_1 + n_{III} c_1 + n_{IV} d_1$.

§ 3.

Für jede Reihe pter Ordnung ist:

$$\text{I. } a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III} + e_1(n-1)_{IV} + \ldots$$
$$\text{II. } S_n = n \cdot a_1 + n_{II} b_1 + n_{III} c_1 + n_{IV} d_1 + n_V e_1 + \ldots$$

Beweis: Durch Induction, d. h. es wird bewiesen, dass, wenn die Formeln für eine Reihe irgend welcher Ordnung gelten, sie dann auch für die Reihen der nächst höhern Ordnung gelten. Für alle Reihen gilt nun $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_{n-1}$. Gilt nun für $b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_{n-1}$ die Formel II, ist also $b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1} = b_1(n-1) + c_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III} + \ldots$ wobei die Reihe $b_1 + b_2 + \ldots\ldots$ von einem Grade niedriger als die gegebene Reihe ist, so erhält man $a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1(n-1)_{II} + d_1(n-1)_{III} + e_1(n-1)_{IV} + \ldots$

Dann ist aber

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + 1 \cdot b_1 \\
a_3 &= a_1 + 2 \cdot b_1 + 2_{II} c_1 \\
a_4 &= a_1 + 3 \cdot b_1 + 3_{II} c_1 + 3_{III} d_1. \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1) b_1 + (n-1)_{II} c_1 + (n-1)_{III} d_1 + \ldots
\end{aligned}$$

und durch Addition

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n = n \cdot a_1(1+2+3\ldots(n-1)] + c_1(2_{II} + 3_{II} + 4_{II} + \ldots(n-1)_{II}) + d_1(3_{III} + 4_{III} + 5_{III} + \ldots(n-1)_{III}) + \ldots$$

$$S_n = n \cdot a_1 + n_{II} \cdot b_1 + n_{III} c_1 + n_{IV} d_1 + \ldots$$

Gilt also Formel II für eine Reihe pter Ordnung, so gilt sie auch für eine Reihe (p+1)ster Ordnung. Nun gilt sie aber, wie bewiesen, für die Reihen III. Ordnung, also auch für die Reihen IV. Ordnung etc.

Zusatz I. Ist in einer arithmetischen Reihe III. Ordnung $a=o$, $b=o$, $c=o$, $d=1$, so liefert $a_n = 1 . (n-1)^3$ die Reihe der Cubikzahlen, die also eine arithmetische Reihe III. Ordnung bilden, nämlich:

0, 1, 8, 37, 64, 125, 216 ...	Hauptreihe
1, 7, 19, 37, 61,	erste Differenzreihe
6, 12, 18, 24	zweite Differenzreihe
6, 6, 6	dritte Differenzreihe.

Die Summe der ersten n Glieder ist $Sn = . o + n_{II} . 1 + n_{III}\, 6 + n_{IV}\, 6$. Z. B. für $n = 7$.

$$S_7 = o + \frac{7 . 6}{1 . 2} . \; 1 + \frac{7 . 5 . 5}{1 . 2 . 3} . \; 6 + \frac{7 . 6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3 . 4} . 6$$

$$21 + 210 + 210 = 441.$$

Zusatz II. Alle unendlichen arithmetischen Reihen sind divergent.

b) Geometrische Reihen.

§ 1.

Nach der Erklärung liegt den geometrischen Reihen die Multiplication bezüglich Division zu Grunde, d. h. jedes folgende Glied geht aus dem vorhergehenden durch Multiplication oder Division mit einem constanten Faktor hervor. Daher ist das allgemeine Glied $a_n = aq^{n-1}$, wobei q der Quotient oder Exponent der Reihe heisst.

Die Glieder der Reihe findet man, indem man in dem allgemeinen Gliede für n die Werte von 1 bis zu einer bestimmten Grenze setzt, dann lautet die Reihe $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots aq^{n-1}$. Ist q in absoluter Hinsicht grösser als 1, so heisst die Reihe steigend, ist q in absoluter Hinsicht kleiner als 1, so heisst die Reihe fallend. So ist für $a = 1$ und $q = 2$ die Reihe: 1, 2, 4, 8, 16 .... für $a = 1$ und $q = {}^1/_2$, 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ .....

§ 1.

Für das summatorische Glied sind 2 Fälle zu unterscheiden, nämlich ob n endlich oder unendlich gross ist.

I. Fall. Gesucht wird die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern einer geometrischen Reihe, deren allgemeines Glied $a_n = aq^{n-1}$ ist.

Behauptung: $I S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$ oder $II S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

Beweis: Es ist $Sn = a + aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1}$ —1. Multipl. man hierin beide Seiten mit q, so ist

$q . Sn = \quad aq + aq^2 \quad + aq^{n-1} + aq^n$ —2. Subtrahiert man 1 von 2, so

erhält man $Sn\,(q-1) = aq^n - a = a(q^n - 1)$ daher

$Sn = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$ oder durch Erweiterung des Bruches mit -1

$Sn = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

Anmerkung: Formel I wird man benutzen, wenn $q > 1$, Formel II, wenn $q < 1$ ist. Ist $q=1$, so ist sowohl Formel I wie II unbrauchbar, man erhält hier $Sn = n . a$.

II. Fall. n ist unendlich gross. Hierbei sind wiederum 3 Fälle zu unterscheiden, nämlich $q \gtreqless 1$.

α. $q > 1$. In diesem Falle ist die Reihe divergent, da beim Fortschreiten der Reihe die Glieder bis ins Unendliche wachsen.

β. $q = 1$. Auch hierin ist die Reihe divergent, da $S_n = n \cdot a$ ist, und da n unendlich gross ist, so ist auch der Wert der Reihe Sn unendlich gross.

γ. $q < 1$. Hier ist $Sn = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Ist nun q ein echter Bruch, so nähert sich mit dem Wachsen von n der Wert von q^n immer mehr dem Werte Null, den er zwar nie erreicht, dem er aber so nahe kommt, dass er auf den Wert von Sn keinen Einfluss mehr hat, folglich ist für n = unendlich und $q < 1$.

$$Sn = \frac{a}{1-q},$$ daher ist die Reihe a, aq, aq^2 . . . .

in diesem Falle convergent.

§ 3.

Die beiden Formeln $a_n = aq^{n-1}$ und $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$ bilden zwei algebraische Gleichungen zwischen a, a_n, n, Sn und q. Sind von diesen Grössen 3 gegeben, so lassen sich die beiden anderen berechnen, wie die nachstehende Tabelle ergiebt, die alle Aufgaben löst, die sich bei den geometrischen Reihen stellen lassen.

	Gegeben	Gesucht	Formel
1.	a, q, n	I a	$a_n = aq^{n-1}$
		II Sn	$Sn = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$
2.	a, q, Sn	I a_n	$a_n = \frac{a + (q-1)\,Sn}{q}$
		II n	$n = \frac{\text{Log}\,(a+(q-1)Sn) - \text{Log}\,a}{\text{Log}\,q}$
3.	a, n, Sn	I a_n	a_n zu berechnen aus der Gleichung $a_n\,(Sn - a^n)^{n-1} - a\,(Sn - a)^{n-1} = 0$.
		II q	q zu berechnen aus $q^n - \frac{Sn}{a}\,q + \frac{Sn-a}{a} = 0$.
4.	q, n, Sn	I a_n	$a_n = \frac{(q-1)\,q^{n-1}\,Sn}{q^n - 1}$
		II a	$a = \frac{(q-1)\,Sn}{q^n - 1}$
5.	a, q, a_n	I Sn	$Sn = \frac{a_n\,q - a}{q-1}$
		II n	$n = \frac{\text{Log}\,a_n - \text{Log}\,a}{\text{Log}\,q} + 1$
6.	a, n, a_n	I Sn	$Sn = \frac{(q^n - 1)\,a_n}{(q-1)\,q^{n-1}}$
		II q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}$

	Gegeben	Gesucht	Formel
7.	$a,\ a_n,\ Sn$	I q	$q = \frac{Sn - a}{Sn - a_n}$
		II n	$n = \frac{\text{Log } a_n - \text{Log } a}{\text{Log } (S_n - a) - \text{Log } (S_n - a_n)} + 1$
8.	$q,\ n,\ a_n$	I Sn	$Sn = \frac{(q^n - 1)\, a_n}{(q - 1)\, q^{n-1}}$
		II a	$a = \frac{a_n}{q^{n-1}}$
9.	$q,\ a_n,\ Sn$	I a	$a = q \,.\, a_n\, (q - 1)\, Sn$
		II n	$n = \frac{\text{Log } a_n - \text{Log } (qa_n - (q - 1)\, Sn)}{\text{Log } q} + 1$
10.	$n,\ a_n,\ Sn$	I a	wird gefunden aus $a(Sn - a)^{n-1} - a_n\, (Sn - a^n)^{n-1} = 0$
		II q	wird gefunden aus $q^n - \frac{Sn}{S_n - a_n}\, q^{n-1} + \frac{a}{S_n - a_n} = 0.$

§ 4

Aufgabe: Zwischen 2 Glieder a und b sollen n Glieder eingeschaltet werden, so dass sie zusammen eine geometrische Reihe bilden.

Auflösung: Die Aufgabe ist gelöst, wenn man q kennt. Das erste Glied ist a, das letzte Glied $a_n = b$, die Anzahl der Glieder $n + 2$. Aus 6 . II folgt, wenn man für n, $n + 2$ einsetzt

$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$, also ist die Reihe:

$$a,\ a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\quad a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^2\quad a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^3\ \ldots\ldots\ b.$$

Soll nur ein Glied interpoliert werden, so ist $n = 3$, $q = \sqrt[2]{\frac{a}{b}}$ und die Reihe a, $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, b. Das eingeschaltete Glied $a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$ ist die mittlere Proportionale zwischen a und b.

§ 5.

Aufgabe: Gesucht wird das summatorische Glied der geometrischen Reihe $a_n = (a + (n - 1)\, d)\, q^{n-1}$.

Auflösung: Es ist I $S_n = a + (a + d)\, q + (a + 2d)\, q^2 + \ldots\ (a + (n-1)\, d)\, q^{n-1}$. Multipliciert man diese Gleichung mit q, so ist II$q \,.\, S_n = aq + (a + d)\, q^2 + (a + 2d)\, p^3 + \ldots\ (a + (n-1)d)q^n$. Löst man hierin alle Klammern bis auf die letzte in II auf und subtrahiert I von II, so heben sich alle Glieder, welche a enthalten, bis auf das erste in I fort und es bleibt:

$$(q-1)\ Sn = (a + (n - 1)\, d)\, q^n - a - (d\, q + dq^2 + dq^3 + dq^{n-1})$$

$$= (a + (n - 1)\, d)\, q^n - a - \frac{qd\, (q^{n-1}1)}{q-1}$$

$$Sn = \frac{(a + (n - 1)\, d)\, q^n - a}{q-1} = \frac{qd\, (q^{n-1} - 1)}{(q-1)^2}$$

§ 6.

Die Differenz zweier Potenzen von gleichem Exponenten ist durch die Differenz der beiden Grundzahlen teilbar $a^n - b^n = (a-b) = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots b^{n-1})$.

Beweis: Setzt man in der Formel $Sn = \frac{a\,(1 - q^n)}{1 - q}$, $a = 1$ und $q = \frac{b}{a}$, so erhält man $1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^n - b^n}{(\ddot{a} - b)a^{n-1}}$. Multipliziert man dies und die gegebene Reihe mit a^{n-1}, so ist $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + b^{n-1}$ und durch Multiplikation mit $(a-b)$; $a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots b^{n-1})$.

Ende des ersten Teils.

